

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ НА УПРУГОМ ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ С НЕПОЛНЫМ КОНТАКТОМ В ВИДЕ ДВУХ ТРАНШЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ГЛАВНОЙ ОСИ ПОЛОСЫ.

Приводится численная реализация задачи об изгибе бесконечной полосы на упругом винклеровском основании с неполным контактом в виде двух траншей, параллельных главной оси полосы. Произведен подробный анализ полученных результатов.

Ключевые слова: изгиб бесконечной полосы, интеграл, траншеи, ширина полосы, изгибающие моменты.

SIMULATION OF THE NUMERICAL REALIZATION OF THE PROBLEM OF THE BENDING OF AN INFINITE STRIP ON AN ELASTIC WINKLER BASE WITH INCOMPLETE CONTACT IN THE FORM OF TWO TRENCHES PARALLEL TO THE MAIN AXIS OF THE STRIP.

A numerical realization of the problem of the bending of an infinite strip on an elastic Winkler base with incomplete contact in the form of two trenches parallel to the main axis of the strip is given. There is made a detailed analysis of the results.

Keywords: infinite strip bend, integral, trenches, strip width, bending moments.

В работе [4] получено аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной полосы на упругом винклеровском основании с неполным контактом в виде траншей, параллельных главной оси полосы на основе метода обобщенных решений и интегральных преобразований Фурье [1,2,3]. Рис.1., где выражения прогибов, изгибающих моментов и приведенных поперечных сил имеют вид:

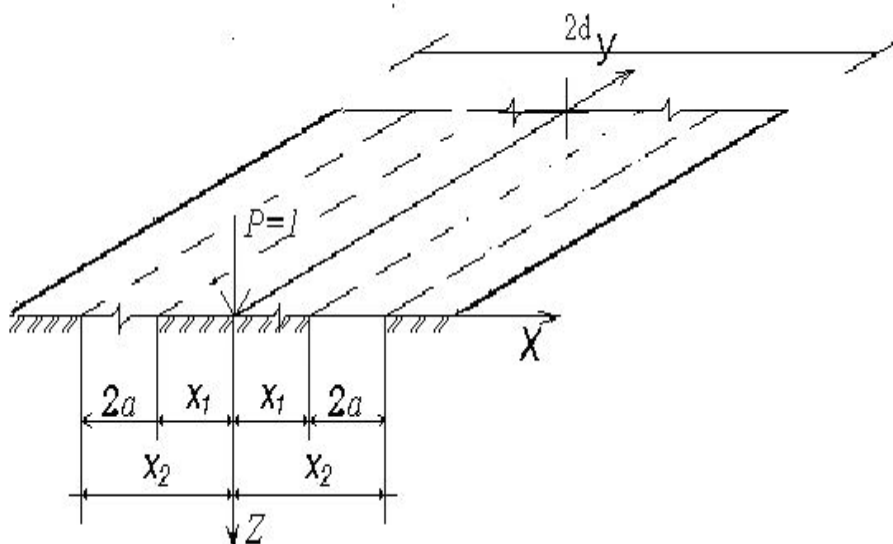


Рис. 1. Расчетная схема бесконечной полосы на упругом винклеровском основании с неполным контактом в виде двух траншей, параллельных главной оси полосы.

$$\begin{aligned}
W(x, y) = & W_{\infty}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} W(t, \eta) \int_0^{\infty} K(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{01}(\eta, x, -d) \cos \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{02}(\eta, x, -d) \cos \eta y d\eta + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\eta) \beta_{03}(\eta, x, +d) \cos \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\eta) \beta_{04}(\eta, x, +d) \cos \eta y d\eta;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$W_{\infty}(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{Q_0(\xi, \eta) \cos \xi x \cos \eta y d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2 + 1}; \tag{2}$$

Применив оператор

$$\begin{aligned}
L_1 = (x, y) = & -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right); \\
L_2 = (x, y) = & -D \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right);
\end{aligned} \tag{3}$$

к выражению прогибов (1), получим выражения изгибающих моментов и приведенных поперечных сил:

$$\begin{aligned}
M_x(x, y) = & M_{x\infty}(x, y) + \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} W(t, \eta) \int_0^{\infty} K_{M_x}(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt - \\
& - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{41}(\eta, x, -d) \cos \eta y d\eta - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{42}(\eta, x, -d) \cos \eta y d\eta - \\
& - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\eta) \beta_{43}(\eta, x, +d) \cos \eta y d\eta - \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\eta) \beta_{44}(\eta, x, +d) \cos \eta y d\eta;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$M_{x\infty}(x, y) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{Q_0(\xi, \eta) (\xi^2 + \nu \eta^2) \cos \xi x \cos \eta y d\xi d\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2 + 1}; \tag{5}$$

$$N_x(x, y) = N_{x\infty}(x, y) - \frac{2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} W(t, \eta) \int_0^{\infty} K_{N_x}(x, \eta, t) \cos \eta y d\eta dt + \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_1(\eta) \beta_{61}(\eta, x, -d) \cos \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_2(\eta) \beta_{62}(\eta, x, -d) \cos \eta y d\eta + \\
& + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_3(\eta) \beta_{63}(\eta, x, +d) \cos \eta y d\eta + \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} A_4(\eta) \beta_{64}(\eta, x, +d) \cos \eta y d\eta;
\end{aligned} \tag{7}$$

Результаты расчета приведены на рис. (2÷5) и табл. (1÷4).

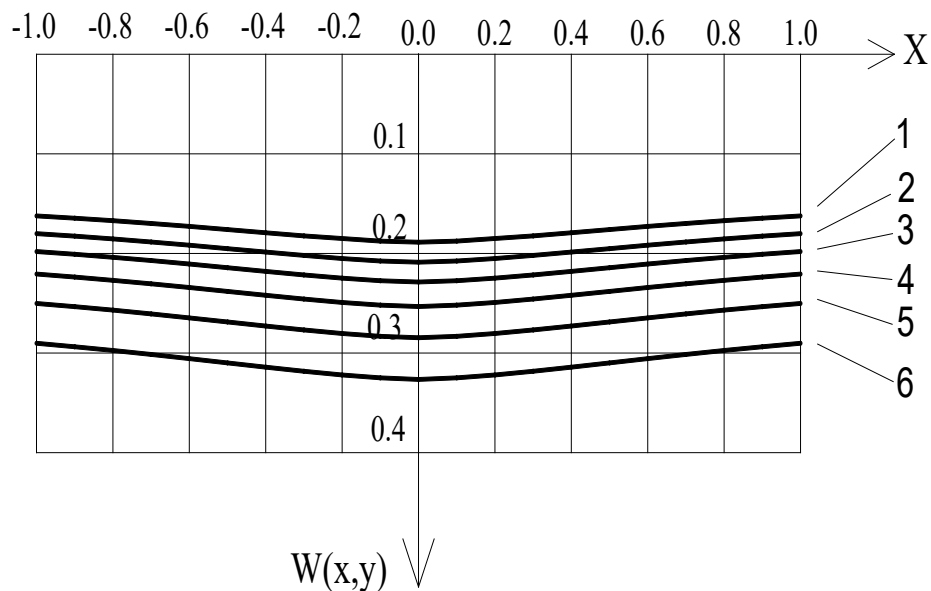


Рис.2. 1÷6-Эпюра прогибов по оси $X=0\div 1.0$ в бесконечной полосе на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде 2-х траншей, расположенных параллельно оси Y , при параметрах траншей $x_1=0.1$, $x_2=0.1 \div 0.6$ и полуширине полосы $b=1$.

Таблица 1

Значения прогибов $W(x,y)$ в бесконечной полосе при полуширине полосы $b=1$ по оси $X=0\div 1.0$								
wz	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
i00	0.1	0.1	0.1887	0.1876	0.1853	0.1824	0.1792	0.1760
i01	0.1	0.2	0.2088	0.2076	0.2051	0.2020	0.1986	0.1952
i02	0.1	0.3	0.2287	0.2274	0.2248	0.2216	0.2180	0.2143
i03	0.1	0.4	0.2533	0.2519	0.2492	0.2458	0.2420	0.2381
i04	0.1	0.5	0.2846	0.2832	0.2804	0.2768	0.2729	0.2688
i05	0.1	0.6	0.3265	0.3249	0.3220	0.3183	0.3142	0.3099
wz	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
i00	0.1	0.1	0.1760	0.1728	0.1699	0.1671	0.1646	0.1623
i01	0.1	0.2	0.1952	0.1917	0.1885	0.1854	0.1826	0.1801
i02	0.1	0.3	0.2143	0.2106	0.2071	0.2039	0.2008	0.1981
i03	0.1	0.4	0.2381	0.2342	0.2305	0.2270	0.2237	0.2207
i04	0.1	0.5	0.2688	0.2647	0.2607	0.2569	0.2534	0.2500

								2
i05	0.1	0.6	0.3099	0.3056	0.3014	0.2974	0.2937	$\frac{0.290}{2}$

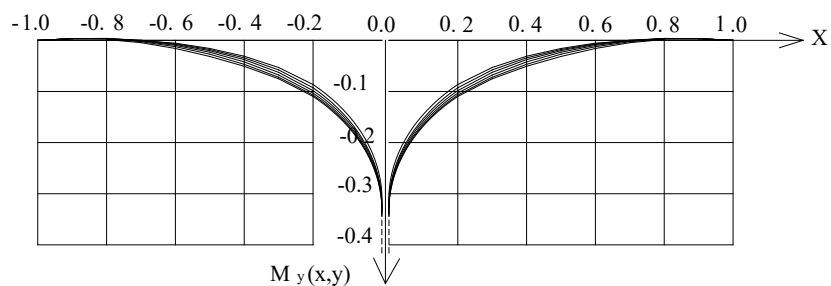


Рис. 3 Эпюра изгибающих моментов $M_y(x,y)$ по оси $X=0 \div 1.0$ в бесконечной полосе на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде 2-х траншей, расположенных параллельно оси Y , при параметрах траншей $x_1=0.1$, $x_2=0.1 \div 0.6$ и полуширине полосы $b = 1$.

Таблица 2

Значения изгибающих моментов $M_y(x,y)$ в бесконечной полосе при полуширине полосы $b=1$ по оси $X=0 \div 1.0$								
M_y	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
i11	0.1	0.1	∞	-0.1446	-0.0864	-0.0531	-0.0311	-0.0159
i12	0.1	0.2	∞	-0.1521	-0.0928	-0.0578	-0.0343	-0.0180
i13	0.1	0.3	∞	-0.1574	-0.0984	-0.0626	-0.0377	-0.0202
i14	0.1	0.4	∞	-0.1619	-0.1032	-0.0678	-0.0421	-0.0232
i15	0.1	0.5	∞	-0.1654	-0.1071	-0.0721	-0.0469	-0.0271
i16	0.1	0.6	∞	-0.1675	-0.1097	-0.0752	-0.0507	-0.0315
M_y	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
i11	0.1	0.1	-0.0159	-0.0055	0.0009	0.0038	0.0033	0.0000
i12	0.1	0.2	-0.0180	-0.0068	0.0003	0.0036	0.0033	0.0000
i13	0.1	0.3	-0.0202	-0.0081	-0.0004	0.0034	0.0033	0.0000
i14	0.1	0.4	-0.0232	-0.0099	-0.0013	0.0030	0.0033	0.0000
i15	0.1	0.5	-0.0271	-0.0124	-0.0027	0.0025	0.0032	0.0000
i16	0.1	0.6	-0.0315	-0.0159	-0.0046	0.0017	0.0030	0.0000

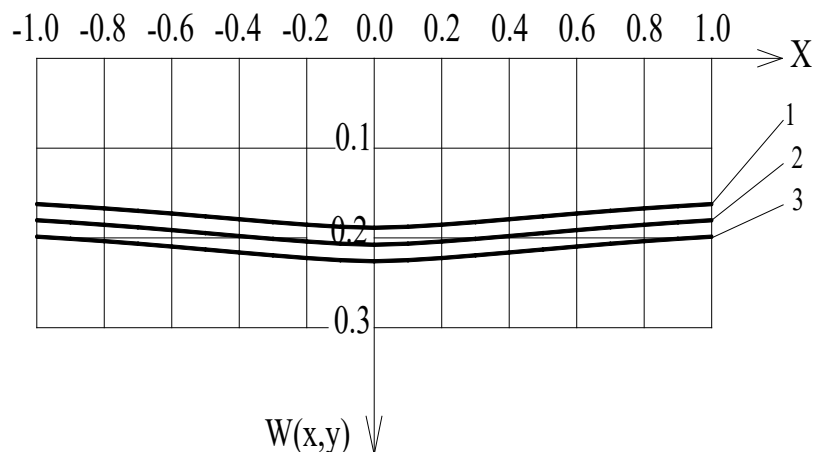


Рис. 4 1 ÷ 3-Эпюра прогибов по оси $X=0 \div 1.0$ в бесконечной полосе на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде 2-х траншей, расположенных параллельно оси Y , при параметрах траншей $x_1=0.4$, $x_2=0.4 \div 0.6$ и полуширине полосы $b=1$.

Таблица 3

Значения прогибов $W(x,y)$ в бесконечной полосе при полуширине полосы $b=1$ по оси $X=0 \div 1.0$								
wz	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
i44	0.4	0.4	0.1887	0.1876	0.1853	0.1824	0.1792	0.1760
i45	0.4	0.5	0.2076	0.2064	0.2040	0.2011	0.1979	0.1946
i46	0.4	0.6	0.2260	0.2248	0.2224	0.2194	0.2162	0.2129
wz	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
i44	0.4	0.4	0.1760	0.1728	0.1699	0.1671	0.1646	0.1623
i45	0.4	0.5	0.1946	0.1913	0.1882	0.1854	0.1827	0.1803
i46	0.4	0.6	0.2129	0.2096	0.2065	0.2036	0.2010	0.1986

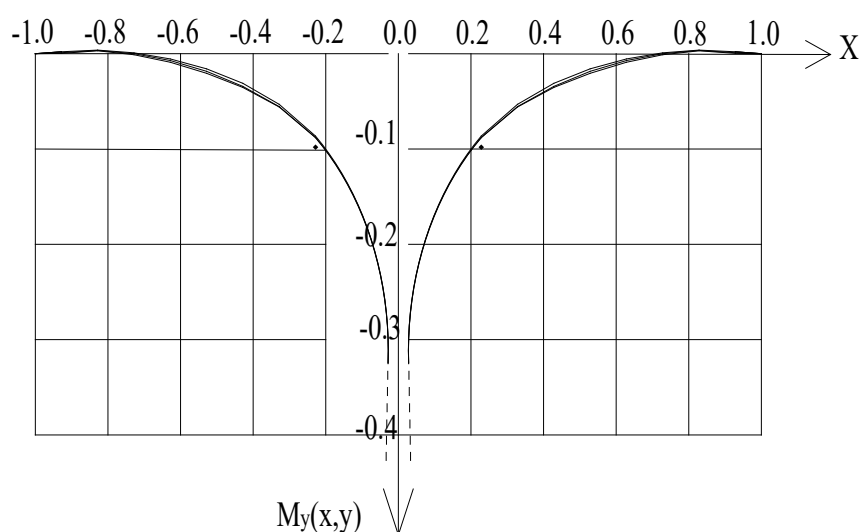


Рис. 5 Эпюра изгибающих моментов $M_y(x,y)$ по оси $X=0 \div 1.0$ в бесконечной полосе на упругом

основании с учетом неполного контакта с основанием в виде 2-х траншей, расположенных параллельно оси Y, при параметрах траншей $x_1=0.4$, $x_2=0.4 \div 0.6$ и полуширине полосы $b = 1$.

Таблица 4

Значения прогибов $M_y(x,y)$ в бесконечной полосе при полуширине полосы $b=1$ по оси $X=0 \div 1.0$								
M_x	x_1	x_2/x	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000
i44	0.4	0.4	∞	-0.1446	-0.0864	-0.0531	-0.0311	-0.0159
i45	0.4	0.5	∞	-0.1459	-0.0881	-0.0555	-0.0343	-0.0185
i46	0.4	0.6	∞	-0.1453	-0.0879	-0.0559	-0.0354	-0.0206
M_x	x_1	x_2/x	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000
i44	0.4	0.4	-0.0159	-0.0055	-0.0009	-0.0038	-0.0033	-0.0000
i45	0.4	0.5	-0.0185	-0.0072	-0.0000	-0.0034	-0.0033	-0.0000
i46	0.4	0.6	-0.0206	-0.0090	-0.0011	-0.0030	-0.0031	-0.0000

Анализ результатов расчета бесконечной полосы на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием, в виде траншей симметрично расположенных вдоль продольной оси полосы.

Результаты расчета бесконечной полосы на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием в виде траншеи расположенной вдоль продольной оси полосы полушириной $b=1$ и $b=2$ (рис. 1) приведены на рис. 2 \div 5 и табл. 1 \div 4.

При отсутствии траншеи, т.е. при полном контакте полосы с основанием, безразмерный прогиб при полуширине полосы $b=1$ под единичной силой равен 0.1887.

Как следует из рис. 2 и табл. 1 при полуширине полосы $b=1$ (ширина полосы $2b = 2$) и ширине центрально расположенной вдоль оси полосы, траншеи под полосой размером $2a=1,2$, т.е. $x_1=0$; $x_2=0 \div 0,6$ (рис. 1) безразмерный прогиб в центре полосы составляет 0.3824, т.е. прогиб увеличивается в 2,03 раза по сравнению с полным контактом с основанием.

При полуширине бесконечной полосы $b=2$ (ширина полосы $2b = 4$) в случае полного контакта полосы с основанием безразмерный прогиб в центре полосы равен 0.1337. А при наличии траншеи, расположенной вдоль главной оси полосы, размером $2a=1,2$, т.е. $x_1=0$; $x_2=0 \div 0,6$ (рис. 1) безразмерный прогиб в центре полосы составляет 0.1959 (рис. 3, табл. 2)

Аналогичным образом изменяются и значения изгибающих моментов $M_y(x,y)$. Так, например, при полном контакте с основанием бесконечных полос шириной $2b = 2$ значения $M_y(x,y)$ при абсциссе $x = 0.1$ равны -0.1446 рис. 4 табл. 3, а при наличии под полосой траншеи шириной 1.2, значения изгибающих моментов $M_y(x,y)$ составят соответственно -0.1826, т.е. увеличатся в 1.26 раза. А при ширине бесконечной полосы $2b = 4$ значения $M_y(x,y)$ при абсциссе $x = 0.1$ равны -0.1724 рис. 5 табл. 4, а при наличии под полосой траншеи шириной 1.2, т.е. $x_1=0$; $x_2=0 \div 0,6$ (рис. 1) значения изгибающих моментов $M_y(x,y)$ составят соответственно -0.2129, т.е. увеличатся в 1.23 раза по абсолютной величине.

Литература:

1. Градштейн И.С., Рыжик И.И. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
2. Травуш В.И. Об одном методе решения задач изгиба конструкций, лежащих на

- винклеровском упругом основании. Сборник трудов: «Вопросы архитектуры и строительства зданий для зрелищ, спорта и учреждений культуры» М., 1976, №4, с.83-89
3. Маруфий А.Т. Изгиб различных схем полос на упругом основании с учетом неполного контакта с основанием. Бишкек, 2006 – 168с
 4. Маруфий А.Т., Джусуев У.С. Моделирование задач изгиба бесконечной полосы на упругом основании с особенностью в основании в виде траншей, расположенных вдоль главной оси полосы. Известия НАН КР №2, Бишкек 2008-с.28-33
-