УДК 517.95

К.Алымкулов, К.Ж.Белеков
Д.ф.-м.н., профессор ОшГУ, м.н.с. ИМ НАН КР
K.Alymkulov, K.Zh.Belekov
D.ph.-m.s., professor OshSU, junior researcher IM NAS KR

ЗАДАЧА ЛАЙТХИЛЛА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНИЕЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВЫРОЖДЕНИЯ

В статье классическим методом малого параметра, а также методом униформизации исследуется решение задачи Лайтхилла для линейного сингулярно возмущенного гиперболического уравнения с линией параболического вырождения.

Ключевые слова: задача лайтхилла, гиперболические уравнения, метод униформизации, произвольные постоянные, гладкие функции.

THE LIGHTHILL PROBLEM FOR A LINEAR SINGULARLY PERTURBED HYPERBOLIC EQUATION WITH A LINE OF PARABOLIC DEGENERACY

In the paper, the classical method of a small parameter and the uniformization method study the solution of the Lighthill problem for a linear singularly perturbed hyperbolic equation with a line of parabolic degeneracy.

Keywords: light hill problem, hyperbolic equations, uniformization method, arbitrary constants, smooth functions.

Рассмотрим возмущенное линейное гиперболическое уравнение с линией параболического вырождения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \qquad (1)$$

Невозмущенное ($\varepsilon = 0$) уравнение имеет вид

$$Lu^{(0)}(x,y) := u^{(0)}_{xx}(x,y) - yu^{(0)}_{yy}(x,y) - \frac{1}{2}u^{(0)}_{y}(x,y) = 0 \qquad (2)$$

Для уравнения (2) прямая $y = 0$ является линией параболического вырождения. Уравнение (2) имеет линии характеристики

$$x - 2y^{\frac{1}{2}} = c_1 \ , \quad x + 2y^{\frac{1}{2}} = c_2 \ , \qquad (3)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Для уравнения (1) ставится задача: найти решение этого уравнения удовлетворяющее следующим условиям:

, , (4)

где - гладкие функции, в области ограниченной отрезком и

характеристиками и

Отметим ,что более общие уравнения вида (2) *изучались в* [1-2]. *Впервые задача Лайтхилла для уравнения вида* (2) *рассматривалась в* [3].

Решение задачи (2), (4) представляется в виде:

$$u^{(0)}(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+2y^{\frac{1}{2}}\right)+\varphi\left(x-2y^{\frac{1}{2}}\right)\right]+2y^{\frac{1}{2}}\int_0^1\psi\left(x+(2t-1)2y^{\frac{1}{2}}\right)dt \qquad (5)$$

В дальнейшем для уравнения (2) удобно рассмотреть следующую задачу:

$$u(x,\delta)=\overline{\varphi}(x),\quad u_y(x,\delta)=\overline{\psi}(x),\quad \left(0<\delta<\frac{1}{16}\right), \qquad (6)$$

где $\overline{\varphi}(x),\overline{\psi}(x)$ - известные гладкие функции.

Решение этой задачи можно представить в виде

$$u^{(0)}(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi\big(x+\omega(y,\delta)\big)+\varphi\big(x-\omega(y,\delta)\big)\right]+\delta^{\frac{1}{2}}\omega(y,\delta)\int_0^1\psi\big(x+(2t-1)\omega(y,\delta)\big)dt, \qquad (7)$$

где $\omega(y,\delta)=2\left(y^{\frac{1}{2}}-\delta^{\frac{1}{2}}\right)$.

Для получения решения неоднородного уравнения:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y)-yu_{yy}(x,y)-\frac{1}{2}u_y(x,y)=f(x,y) \\ u(x,\delta)=0,\ u_y(x,\delta)=0, \end{cases} \qquad (8)$$

можно использовать принцип Дюамеля [5] , идея которого заключается в следующем. Для решения задачи (8) рассматривается следующая вспомогательная задача Дюамеля:

$$\begin{cases} v_{xx}(x,y,\tau)-yv_{yy}(x,y,\tau)-\frac{1}{2}u_y(x,y,\tau)=0, \\ v(x,\tau,\tau)=0, \\ v_y(x,\tau,\tau)=-\frac{1}{\tau}f(x,\tau), \end{cases} \qquad (9)$$

где τ - параметр , который изменяется на отрезке $\left[\delta,\ 1/16\right]$.

Решение задачи (9) в силу (5) представляется в виде:

$$v(x,y,\tau)=\tau^{-\frac{1}{2}}\omega(y,\tau)\int_0^1 f(x+(2t-1)\omega(y,\tau),\tau)dt:=\Phi(x,y,\tau,f)$$

$$v_y(x,y,\tau)=\tau^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 f(x+(2t-1)\omega(y,\tau),\tau)dt+\tau^{-\frac{1}{2}}\omega(y,\tau)y^{-\frac{1}{2}}\int_0^1 f'(x+(2t-1)\omega(y,\tau),\tau)(2t-1)dt \qquad (10)$$

Решение задачи (8) записывается в виде:

(11)

Действительно, дифференцируя (11) имеем

$$u_{xx}(x,y)=\int_{\delta}^{y} v_{xx}(x,y,\tau)d\tau$$

Подставляя эти производные в (8) имеем:

$$\int_{\delta}^{y} v_{xx}(x,y,\tau)d\tau + f(x,y) - y\int_{\delta}^{y} v_{yy}(x,y,\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_{\delta}^{y} v_{y}(x,y,\tau)d\tau = f(x,y)$$

$$\int_{\delta}^{y}\left[v_{xx}(x,y,\tau) - yv_{yy}(x,y,\tau) - \frac{1}{2}v_{y}(x,y,\tau)\right]d\tau + f(x,y) = f(x,y)$$

$$f(x,y) = f(x,y)$$

Решение задачи (1),(4) ищем в виде ряда

$$u(x,y) = u^{(0)}(x,y) + \varepsilon u^{(1)}(x,y) + \varepsilon^{2}u^{(2)}(x,y) + \ldots + \varepsilon^{k}u^{(k)}(x,y) + \ldots \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (1) для определения неизвестных функций $u^{(j)}(x,y)$ $(j = 0,1,2,3,\ldots)$ имеем уравнения

$$Lu^{(0)}(x,y) = 0 \qquad (13.0)$$

$$Lu^{(1)} = u_{yy}^{(0)} \qquad (13.1)$$

$$Lu^{(2)} = u_{yy}^{(1)} \qquad (13.2)$$

……..

$$Lu^{(k)} = u_{yy}^{(k-1)} \qquad (13.k)$$

…….

где $Lu^{(k)} := u_{xx}^{(k)} - yu_{yy}^{(k)} - \frac{1}{2}u_{y}^{(k)}$.

Так как, $u_{y}^{(0)}(x,y)$ при $y = 0$ не определена, мы не можем решить уравнения (13.1), (13.2), … с начальными данными на линии параболического вырождения $y = 0$.

Поэтому, для (1) рассмотрим видоизмененную задачу

$$u(x,\delta) = \varphi(x,\delta) = \overline{\varphi}(x), \quad u_{y}(x,\delta) = \psi(x,\delta) = \overline{\psi}(x), \qquad (14)$$

где $\varphi(x,\delta)$, $\psi(x,\delta)$ - такие гладкие функции по переменной x, что $\lim\limits_{\delta\to 0}\varphi(x,\delta) = \varphi(x)$, $\lim\limits_{\delta\to 0}\psi(x,\delta) = \psi(x)$.

Решение задачи (13.0) представляется в виде (7). Далее решаем уравнения (13.n) (n=1,2,3,…) с нулевыми начальными данными. Тогда в силу формулы (11), имеем

$$u^{(1)}(x,y) = \int_{\delta}^{y} \Phi\left(x,y,\tau,u_{yy}^{(0)}\right)d\tau \qquad (15.1)$$

(15.2)

……..

(15.n)

……

Из выражения (15.1) вытекает, что

$$u^{(1)}(x,y)=\int_{\delta}^{y}\tau^{-\frac{1}{2}}\omega(y,\tau)\int_{0}^{1}u_{yy}^{(0)}(x+(2t-1)\omega(y,\tau),\tau)dtd\tau=\int_{\delta}^{y}\tau^{-\frac{1}{2}}\omega(y,\tau)\int_{0}^{1}\{-\frac{1}{4}\tau^{-\frac{3}{2}}[\overline{\varphi}'(x+(2t-1)\omega(y,\tau)+$$

$$+\omega(\tau,\delta))-\overline{\varphi}'(x+(2t-1)\omega(y,\tau)-\omega(\tau,\delta))]+\frac{1}{2}\tau^{-1}[\overline{\varphi}''(x+(2t-1)\omega(y,\tau)+\omega(\tau,\delta))+$$

$$+\overline{\varphi}''(x+(2t-1)\omega(y,\tau)-\omega(\tau,\delta))]-\frac{1}{2}\delta^{\frac{1}{2}}\tau^{-\frac{3}{2}}\int_{0}^{1}\overline{\psi}(x+(2t-1)\omega(y,\tau)+(2t-1)\omega(\tau,\delta))dt+$$

$$+\delta^{\frac{1}{2}}\tau^{-1}\int_{0}^{1}\overline{\psi}'(x+(2t-1)\omega(y,\tau)+(2t-1)\omega(\tau,\delta))(2t-1)dt-\delta\tau^{-\frac{3}{2}}\int_{0}^{1}\overline{\psi}'(x+(2t-1)\omega(y,\tau)+$$

$$+(2t-1)\omega(\tau,\delta))(2t-1)dt+\delta^{\frac{1}{2}}\omega(\tau,\delta)\tau^{-1}\int_{0}^{1}\overline{\psi}''(x+(2t-1)\omega(y,\tau)+(2t-1)\omega(\tau,\delta))(2t-1)^{2}dt\}d\tau$$

Отсюда имеем, что

$$\left|u^{(1)}(x,y)\right|\le M_1\delta^{\frac{1}{2}}y^{-1}, \qquad (16)$$

при малом y. Методом математической индукции можно показать, что справедливы оценки:

$$\left|u^{(2)}(x,y)\right|\le M_2\delta^{\frac{1}{2}}y^{-2}$$

……

$$\left|u^{(n)}(x,y)\right|\le M_n\delta^{\frac{1}{2}}y^{-n}$$

……

Т.о., ряд (12) можарируется рядом

$$M_0+\delta^{\frac{1}{2}}\left[M_1\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)+M_2\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^2+M_3\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^3+\ldots+M_n\left(\frac{\varepsilon}{y}\right)^n+\ldots\right].$$

Этот ряд является асимптотическим рядом при $y\ge\varepsilon^{\alpha}$, где $\alpha<1$..

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. Решение задачи (1), (4) полученное классическим методом малого параметра в виде ряда (12) существует в области $D_{\alpha}=\left\{D\setminus\varepsilon^{\alpha}\le y\le 1/16,\quad 0<\alpha<1\right\}$.

В частности за δ, можно взять $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Второе доказательство этой теоремы. Из (1) переходим к интегро-дифференциаль-ному уравнению, используя решение невозмущенного уравнения:

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi\left(x+\omega(y,\delta)\right)+\varphi\left(x-\omega(y,\delta)\right)\right]+\delta^{\frac{1}{2}}\omega(y,\delta)\int_{0}^{1}\psi\left(x+(2t-1)\omega(y,\delta)\right)dt+$$

$$+\varepsilon\int_{\delta}^{y}\tau^{-\frac{1}{2}}\omega(y,\tau)\int_{0}^{1}u_{yy}(x+(2t-1)\omega(y,\tau),\tau)dtd\tau\equiv F(x,y,u_{yy}).$$

Рассмотрим шар , где - некоторое малое число в области , и класс функций G удовлетворяющих условиям:

$|u(x,y)| \le M$, $|u_y(x,y)| \le \frac{M}{y^{1/2}}|u(x,y)|$, $|u_{yy}(x,y)| \le \frac{M}{y^{3/2}}|u(x,y)|$,

$|u_x(x,y)| \le M$, $|u_{xx}(x,y)| \le M$.

Оператор F отображает в классе G шар S_γ в себя

$$\|u\| \le M + \delta^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\eta} M + \varepsilon M \frac{1}{y} = \gamma$$

и является сжимающим, при условии $\varepsilon^{1-\alpha} M < 1$, так как

$$\left\| F(x,y,u_{xx}^{(1)}) - F(x,y,u_{xx}^{(2)}) \right\| \le \varepsilon \frac{M}{y} \left\| u^{(2)} - u^{(1)} \right\|.$$

Теперь задачу (1), (4) решаем методом униформизации. Для этого уравнение (1) заменим системой

$$\begin{cases} u_x(x,y) = v(x,y) \\ u_y(x,y) = z(x,y) \\ v_y(x,y) = z_x(x,y) \\ v_x(x,y) - yz_y(x,y) - \frac{1}{2} z(x,y) = \varepsilon\alpha z_y(x,y) \end{cases}$$

Вводим новое переменное ξ и переходим к униформизованной системе уравнений

$$\begin{cases} \xi \frac{\partial y}{\partial \xi} = y + \varepsilon\alpha, & y(1) = 1 - \varepsilon\alpha, \\ \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} = (y + \varepsilon\alpha) z, & u(x,0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x} = v, & v(x,0) = \varphi'(x), \\ \xi \frac{\partial v}{\partial \xi} = (y + \varepsilon\alpha) z_x, & \lim\limits_{\xi \to 0} \xi^{\frac{1}{2}} z(x,\xi) = \psi(x), \\ \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} = v_x - \frac{1}{2} z \end{cases} \tag{17}$$

Из первого уравнения системы находим y:

$$y(\xi) = \xi - \varepsilon\alpha.$$

Тогда система (17) имеет вид:

$$\begin{cases} y = \xi - \varepsilon\alpha \\ \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = z_x, \qquad , \\ \xi \dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial \xi}. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы, то есть уравнение

$$\xi \frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi}$$

решается точно и оно имеет вид:

$$u(x,\xi) = \frac{1}{2}\left[\varphi\left(x + 2\xi^{1/2}\right) + \varphi\left(x - 2\xi^{1/2}\right)\right] + 2\xi^{1/2}\int_0^1 \psi\left(x - 2(1-2t)\xi^{1/2}\right)dt.$$

Литература:

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
2. Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. – Минск: Вышейшая школа, 1977.
3. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Метод униформизации для гиперболического уравнения с параболическим вырождением //Вестн. КазНУ им.Аль-Фараби. Сер. математика, механика, информатика. – Алматы, 2005. - №3. – С.4-8.
4. Алымкулов К., Белеков К.Ж. Оценка решения линейного однородного гиперболического уравнения с линией параболического вырождения //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С.138-141.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. – Москва: Наука, 1966.