УДК 517.953.5

Ю.П.Апаков – к.ф.-м.н., доцент НамИПИ
Y.P. Apakov – c.ph.-m.s., docent NamEPI

ЗАДАЧА ТИПА ЖЕВРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками исследована задача типа Жевре. Единственность решения поставленной задачи доказано методом интеграла энергии, а решение построено методом разделения переменных.

Ключевые слова: уравнения третьего порядка, задачи типа Жевре, метод решения, интеграл.

GEAR-TYPE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

For a third-order equation with multiple characteristics, a Gevrey-type problem is investigated. The uniqueness of the solution of the problem is proved by the method of the energy integral, and the solution is constructed by the method of separation of variables.

Keywords: third-order equations, Gevrey-type tasks, solution method, integration.,

В области $D=\{(x,y): -a<x<a,\ 0<y<b\}$ рассмотрим уравнение

$$U_{xxx}-U_{yy}=0\,. \tag{1}$$

Обозначим $D_1=D\cap(x<0),\ D_2=D\cap(x>0), J=D\cap(x=0)$, тогда $D=D_1\cup D_2\cup J$.

Для уравнения (1) в области D исследуем следующую задачу типа Жевре:

Задача G_1.Найти регулярное решение уравнения (1) в областях D_i i=1,2 из класса $C^{3,2}_{x,y}(D_1)\cap C^{3,2}_{x,y}(D_2)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D_1})\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D_2})$ и удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$U(x,0)=U(x,l)=0,\ -a<x<a\,, \tag{2}$$

$$U(-a,y)=\psi_1(y),\ U(a,y)=\psi_2(y),\ U_x(a,y)=\psi_3(y) \tag{3}$$

и выполняются следующие условия склеивания

$$U(-0,y)=U(+0,y),\ U_x(-0,y)=U_x(+0,y),\ U_{xx}(-0,y)=U_{xx}(+0,y) \tag{4}$$

где , а также .

Отметим, что задача Жевре изучено для уравнения в работе [1], а для уравнения в работе [2,3].

Теорема 1. *Однородная задача имеет только тривиальное решение*.

Доказательство. Предположим обратное, пусть однородная задача имеет решение . Рассмотрим тождество

$$U\left(U_{xxx}-U_{yy}\right)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(UU_{xx}-\frac{1}{2}U_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(UU_y\right)+U_y^2=0$$

Интегрируя это тождество сначала по области D_1, затем по области D_2 и используя соответствующие краевые условия, получим

$$\int_0^l\left(UU_{xx}-\frac{1}{2}U_x^2\right)\Big|_{x=-0}dy+\frac{1}{2}\int_0^l U_x^2\left(-a,y\right)dy+\iint_{D_1}U_y^2\left(x,y\right)dxdy=0 \tag{5}$$

$$\int_0^l\left(UU_{xx}-\frac{1}{2}U_x^2\right)\Big|_{x=+0}dy-\iint_{D_2}U_y^2\left(x,y\right)dxdy=0 \tag{6}$$

Согласно условиям задачи G_1, интегралы стоящие в левых частях равенство (5) и (6) равны между собой. Учитывая это, имеем

$$\frac{1}{2}\int_0^l U_x^2\left(-a,y\right)dy+\iint_{D_1}U_y^2\left(x,y\right)dxdy+\iint_{D_2}U_y^2\left(x,y\right)dxdy=0$$

Это равенство возможно только, при $U_y\left(x,y\right)=0$ как в D_1, так и в D_2.

Следовательно $U\left(x,y\right)=f\left(x\right)$ в D_1 и D_2. Так как $U\left(x,0\right)=f\left(x\right)=0$. Отсюда в силу непрерывности $U\left(x,y\right)$ в D.

Существование решения.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: Найти решение уравнения (1) не равное тождественно нулю, удовлетворяющее условиям (2) и представимое в виде

$$U(x,y)=X(x)Y(y) \tag{7}$$

Подставляя (7) в уравнение (1) получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $Y(y)$

$$X'''+\lambda X=0\,, \qquad Y''+\lambda Y=0$$

Для нахождения функции $Y(y)$ мы приходим к задаче о собственных значениях:

Найти те значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение задачи:

$$Y''+\lambda Y=0,\quad Y\left(0\right)=Y\left(l\right)=0 \tag{8}$$

Известно см. [4;гл.II, §3], что нетривиальное решение задачи (8) существуют только при

$$\lambda_n=(\frac{\pi n}{l})^2,\quad n=1,2,3,....$$

Эти числа являются собственными значениями, а функции

при имеет вид (9)

собственными функциями задачи (8), где - произвольные постоянные.

Общее решение уравнения

$$X_n(x) = C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x}\left(C_{2n}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x + C_{3n}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n x\right)$$

$$k_n = \sqrt[3]{\lambda_n} = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad i = 1,2,3.$$

здесь C_{in} - произвольные постоянные,

Согласно формуле (7) , и в силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений будет также решением уравнения (1), то же справедливо и для ряда

$$U_i(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}[C_{1in}e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x}(C_{2in}\cos\nu_n x + C_{3in}\sin\nu_n x)]\sin\frac{\pi n}{l}y, \qquad (10)$$

где $\nu_n = \frac{\sqrt{3}}{2}k_n$, $i = 1$ в D_1 и $i = 2$ в D_2.

Функция, определяемая формальным рядом (10), удовлетворяет условиям (2).

Требуя от функции $U(x,y)$, определяемой рядом (10) выполнения краевых условий (3) и условий склеивания (4) получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов C_{ijn}, i=1,2,3, j=1,2:

$$\begin{cases} C_{11} - C_{12} + C_{21} - C_{22} = 0 \\ C_{11} - C_{12} - \frac{1}{2}C_{21} + \frac{1}{2}C_{22} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{31} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{32} = 0 \\ C_{11} - C_{12} - \frac{1}{2}C_{21} + \frac{1}{2}C_{22} + \frac{\sqrt{3}}{2}C_{31} - \frac{\sqrt{3}}{2}C_{32} = 0 \\ e^{k_n a}C_{11} + e^{-\frac{1}{2}k_n a}\cos\nu_n a\, C_{21} - e^{-\frac{1}{2}k_n a}\sin\nu_n a\, C_{31} = A_{1n} \\ e^{-k_n a}C_{12} + e^{\frac{1}{2}k_n a}\cos\nu_n a\, C_{22} + e^{\frac{1}{2}k_n a}\sin\nu_n a\, C_{32} = A_{2n} \\ -e^{-k_n a}C_{12} + e^{\frac{1}{2}k_n a}\cos(\nu_n a + \frac{\pi}{3})C_{22} + e^{\frac{1}{2}k_n a}\sin(\nu_n a + \frac{\pi}{3})C_{32} = \frac{1}{k_n}A_{2n}. \end{cases} \qquad \mathbf{(}11\mathbf{)}$$

где числа A_{in}, являются коэффициентами Фурье функции $\psi_i(y)$, при разложении их ряд Фурье по синусам на интервале $(0,l)$, т.е.

$$A_{in} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_i(\eta)\sin\frac{\pi n}{l}\eta\, d\eta, \quad i = 1,2,3$$
.

Вычисления показывает, что определитель система (11):

Тогда решение системы (11) запишется в виде , где

$$\Delta_{11}=\Delta_{12}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e^{k_n a}A_{1n}-\sin\left(\sqrt{3}k_n a+\frac{\pi}{3}\right)A_{2n}+\frac{1}{k_n}\sin\sqrt{3}k_n a A_{3n}\right]$$

$$\Delta_{21}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[-\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}k_n a}\sin\left(\nu_n a+\frac{\pi}{6}\right)A_{1n}+\left(e^{\frac{3}{2}k_n a}\sin\left(\nu_n a+\frac{\pi}{3}\right)-e^{-\frac{3}{2}k_n a}\sin\nu_n a\right)A_{2n}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{k_n}\sin\nu_n a ch\nu_n a\, A_{3n}\right]$$

$$\Delta_{22}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[-2e^{-\frac{1}{2}k_n a}\sin\nu_n a\, A_{1n}+2\sin\nu_n a ch\nu_n a\, A_{2n}-\frac{2}{k_n}\cos\nu_n a sh\nu_n a\, A_{3n}\right]$$

$$\Delta_{31}=\Delta_{32}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}k_n a}\cos\left(\nu_n a+\frac{\pi}{6}\right)A_{1n}+\left(e^{\frac{3}{2}k_n a}\cos\left(\nu_n a+\frac{\pi}{3}\right)+e^{-\frac{3}{2}k_n a}\cos\nu_n a\right)A_{2n}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{k_n}\cos\nu_n a sh\nu_n a\, A_{3n}\right]$$

Подставив C_{ijn} в (10) в области D_1 получим

$$U_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{11}(x)A_{1n}+D_{21}(x)A_{2n}+D_{31}(x)A_{31}\right]\sin\frac{\pi n}{l}y\,, \qquad (12)$$

здесь

$$D_{11}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\Delta}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}e^{k_n(a-x)}-\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}k_n(x-a)}\cos\nu_n x+\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}k_n(x-a)}\cos\left(\nu_n a+\frac{\pi}{6}\right)\sin\nu_n x\right]$$

$$D_{21}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2\Delta}\left[-e^{-k_n x}\sin\left(\sqrt{3}k_n a+\frac{\pi}{3}\right)+e^{\frac{1}{2}k_n(3a+x)}\sin\left(\nu_n(a-x)+\frac{\pi}{3}\right)-\right.$$

$$\left.-e^{\frac{1}{2}k_n(x-3a)}\sin\nu_n(a+x)\right]$$

$$D_{31}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2k_n\Delta}\left[e^{-k_n x}\sin\sqrt{3}k_n a-2e^{\frac{1}{2}k_n x}\left(\sin\nu_n a\cos\nu_n x ch\nu_n a-\sin\nu_n x\cos\nu_n a sh\nu_n a\right)\right]$$

Подставив C_{ijn} в (10) в области D_2 получим

$$U_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{12}(x)A_{1n}+D_{22}(x)A_{2n}+D_{32}(x)A_{3n}\right]\sin\frac{\pi n}{l}y\,, \qquad (13)$$

здесь

$$D_{32}(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2k_n\Delta}\left[e^{-k_nx}\sin\sqrt{3}k_na-2e^{\frac{1}{2}k_nx}\left(\sin\nu_na\cos\nu_nxch\nu_na-\sin\nu_nx\cos\nu_nash\nu_na\right)\right]$$

Если ряды (12) , (13) и его производные входящие в уравнения (1) сходятся равномерно, то функции $U_i(x,y)$ определяемые рядами в области D_i даёт решение задачи G_1.

Возьмем произвольную точку (x_0,y_0) из области D_1 и составим ряд

$$U_1(x_0,y_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[D_{11}(x_0)A_{1n}+D_{21}(x_0)A_{2n}+D_{31}(x_0)A_{31}\right]\sin\frac{\pi n}{l}y_0 \tag{14}$$

Отсюда

$$\left|U_1(x_0,y_0)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left|D_{11}(x_0)\right|\left|A_{1n}\right|+\left|D_{21}(x_0)\right|\left|A_{2n}\right|+\left|D_{31}(x_0)\right|\left|A_{3n}\right|\right]. \tag{15}$$

При сделанных предположениях относительно $\psi_i(y)$, имеет место неравенство см.[5; §55.10,Лемма 7]

$$\left|\psi_i(y)\right|\le\frac{M_i}{n^4},i=1,2,\qquad \left|\psi_3(y)\right|\le\frac{M_3}{n^3},$$

тогда

$$A_{in}=\frac{2}{n^4}N,\ i=1,2,\ A_{3n}=\frac{2}{n^3}N,\quad N=\max M_i,\ i=1,2,3.$$

Теперь оценим функции $D_{i1}(x_0)$. Вычисления показывает что:

$$\left|D_{11}(x_0)\right|\le\frac{1}{\left|\overline{\Delta}\right|}\left[\frac{1}{2}e^{-k_n(a-x_0)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(5a-x_0)}\right]$$

$$\left|D_{21}(x_0)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3\left|\overline{\Delta}\right|}\left[e^{-k_n(2a+x_0)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(a-x_0)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(7a-x_0)}\right]$$

$$\left|D_{31}(x_0)\right|\le\frac{\sqrt{3}}{3k_n\left|\overline{\Delta}\right|}\left[e^{-k_n(2a+x_0)}+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x_0\right)}+e^{-k_n\left(3a-\frac{1}{2}x_0\right)}\right].$$

где

$$\overline{\Delta}=\frac{1}{2}-e^{-3k_na}\sin\left(\sqrt{3}k_na+\frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда из (15), получим оценку

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|D_{11}(x_0)\right|\left|A_{1n}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^4}N\frac{1}{\left|\overline{\Delta}\right|}\left[\frac{1}{2}e^{-k_n(a-x)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(5a-x)}\right]\le CN\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k_n(a-x)}+2e^{-\frac{1}{2}k_n(5a-x)}}{n^4}$$

Легко можно убедится в том, что это ряд сходится абсолютно.
Точно также доказывается абсолютная сходимость остальных рядов (14).

Отсюда следует, ряд сходится абсолютно. И силу произвольности точки ряд (14) равномерно сходится в области .

Аналогично доказывается, равномерное сходимости ряда (13) в области .
Точно также доказывается сходимость рядов составленных по членными дифференцированием

рядов (12) и (13) входящая в уравнения (1).

И так, доказана следующую теорему:

Теорема 2. Если функции $\psi_i(y) \in C^3[0,l],\ i=1,2,\ \psi_3(y) \in C^2[0,l]$, а также $\psi_i(0)=\psi_i(l)=\psi_i''(0)=\psi_i''(l)=0$ то решение задачи G_1, существует и представляется рядом (12) и (13) соответственно в области D_1 и D_2.

Литература:

1.Керефов А.А. Задача Жевре для одного смешанно-параболического уравнения. «Дифференциальные уравнения»,1977, т. ХШ, №1;

2.Джураев Т.Д.,Иргашев Ю. Задача Жевре для смешанных уравнений третьего прорядка с кратными характеристиками. В сб. «Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными и их приложения» Ташкент, «Фан»,1978;

3.Джураев Т.Д. «Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов» Ташкент, «Фан» ,1979;

4.Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. М. «Наука», 1977 г.

5.Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 3. 2-е Изд. М. «Высшая школа». 1998 г.