УДК - 517.96

О.Х Абдуллаев - к.ф.-м.н., доцент НУУз
O. Kh. Abdullayev – c.ph.-m.s., docent NUUz

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

В статье доказывается однозначная разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа со спектральным параметром.

Ключевые слова: уравнения третьего порядка, параметр, дифференцируемая функция, теорема, доказательство.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE WITH A SPECTRAL PARAMETER

In this paper we prove the unique solvability of the boundary-value problem for a third-order equation of hyperbolic type with a spectral parameter.

Keywords: third-order equations, parameter, differentiable function, theorem, proof.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_{xx} - u_{yy} + \lambda^2 u) = 0 \qquad (1)$$

где λ - заданное действительное число.

Пусть Ω - конечная область ограниченная при $y \le 0$ характеристиками

$$A_j C_1 : x + (-1)^j y = 1$$

$$B_j C_2 : x + (-1)^j y = q; \qquad j = \overline{1,2}; \qquad 0 < q < 1$$

уравнения (1) и отрезками $A_j B_j\ (j = 1,2)$ на оси $y = 0$,

где $A_j((-1)^{j-1};0)$; $B_j((-1)^{j-1} \cdot q;0)$; $C_j(0;-q^{j-1})$; ($j = 1,2$)

Введём обозначения

$$I_j = \left\{(x,y) : -1 < (-1)^j x < -q\,,\ \mathrm{y} = 0\right\};\ I_{1j} = \left\{(x,y); -1 < (-1)^j x < -\frac{\mathrm{q}+1}{2}; \frac{\mathrm{q}-1}{2} < y < 0\right\}$$

$$I_{2j} = \left\{(x,y) : -q < (-1)^j x < 0;\ -q < y < 0\right\};\ I_3 = \left\{(x,y); -1 < \mathrm{x} < 0; -1 < \mathrm{y} < 0\right\},\ (\mathrm{j}=1,2).$$

$$\Omega_{11} = \Omega \cap (x + y > q); \qquad \Omega_{12} = \Omega \cap (y - x > q); \qquad \Omega_{21} = \Omega \cap (-q < x + y < q);$$

,

, , , .

В области исследуется следующая

Задача А. Найти функцию со следующими свойствами.

1.

2. является регулярным решением уравнения (1) в области

3. $u_y \in C(A_jB_j)$; $u_y, u_x \in C(A_1C_1)$, $(j=1,2)$, причём $u_y(x,0)$ ограничена в точках A_j $(j=1,2)$, а в точках $B_j (j=1,2)$ может иметь особенность порядка меньше единицы

4. $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{B_2C_2} = f_1(y); \quad (0,y) \in \bar{I}_{22};$$

$$u(x,y)|_{A_1C_1} = \psi(y); \quad (0;y) \in \bar{I}_3;$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{A_1C_1} = \mu(y); \quad (0;y) \in I_3;$$

$$u_y(x,o) = \nu_j(x); \quad (x,0) \in I_j; \quad (j=1,2).$$

где n - внутреняя нормаль: $f_1(y), \psi(y), \mu(y), \nu_j(x), (j=1,2)$ - заданные функции, причём

$$\psi(y) \in C^3(\bar{I}_3), \quad f(y) \in C^3(\bar{I}_{22}), \quad (2)$$

$$\mu(y) \in C(\overline{I_3}) \cap C^2(I_3); \quad \nu_j(x) \in C^2(I_j), \quad 2\nu(1) - \psi_1'(0) = \sqrt{2}\mu_1(0) \quad (3)$$

Известно, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде [1]

$$u(x,y) = Z(x,y) + \omega(y) \quad (4)$$

где, $Z(x,y)$ - регулярное решение уравнения

$$Z_{xx} - Z_{yy} - \lambda^2 Z = 0, \quad (5)$$

а $\omega(y)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция, причём без ограничения общности можно предпологать

$$\omega(0) = \omega^{|}(0) = 0 \quad (6)$$

Теорема. Если выпольнены условия (2),(3) и (6) то задача А однозначно разрешимо.

Доказательство.

В силу (4) и учитывая (6) задача А сведётся к задаче отыскания решения уравнения (5) с краевыми условиями:

$$Z(x,y)|_{B_2C_2} = f_1(y) - \omega(y); \quad (7)$$

(8)

(9)

(10)

(j=1,2)

Известно, что решение задачи Коши-Гурса для уравнения (5) с краевыми условиями (10_1) и

$$Z(x,y)\big|_{A_1E_1} = \psi_1(y) - \omega_1(y) = \psi_1^*(y)\ ; \quad \frac{q-1}{2} \le y \le 0 \tag{11}$$

имеет вид [2] :

$$Z(x,y) = \int\limits_{x-y}^{1} \nu(t) J_0\left[\lambda\sqrt{(t-x+y)(t-x-y)}\right] dt + \psi_1^*\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + \psi_1^*\left(\frac{x+y-1}{2}\right) -$$

$$-\psi_1^*(0) \cdot J_0\left[\lambda\sqrt{(x-y-1)(x+y-1)}\right] -$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y} \psi_1^*\left(\frac{t-1}{2}\right) \frac{J_1\left[\lambda\sqrt{(x-y-1)(x+y-t)}\right]}{\sqrt{(x-y-1)(x+y-t)}}(x-y-1)\, dt$$

$$-\frac{\lambda}{2}\int\limits_{x-y}^{1} \psi_1^*\left(\frac{t-1}{2}\right) \left[\frac{J_1\left[\lambda\sqrt{(x-y-1)(x+y-t)}\right]}{\sqrt{(x-y-1)(x+y-t)}}(x-y-1)\right.$$

$$\left. + \frac{J_1\left[\lambda\sqrt{(x-y-t)(x+y-1)}\right]}{\sqrt{(x-y-t)(x+y-1)}}(x-y-1)\right] dt \tag{12}$$

где $J_i(x)$ (i=1,2) - функция Бесселя [3].

В силу условия (9) и учитывая

$$\frac{\partial Z(x,y)}{\partial n}\bigg|_{A_1C_1} = \frac{\partial Z(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dn}\bigg|_{x-y=1} + \frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dn}\bigg|_{x-y=1} = 1\ , \tag{13}$$

$$\frac{dx}{dn}\bigg|_{x-y=1} = \cos 135^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ , \quad \frac{dy}{dn}\bigg|_{x-y=1} = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ , \tag{14}$$

$$J_0(0) = 1, \quad \frac{J_1(0)}{0} = \frac{\lambda}{2}, \quad J_2(0) = 0$$

из (12) получим

. (15)

Далее сделав замену, и дифференцируя по y получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

(16)

решение которого определяется с помощью метода вариации постоянных и имеет вид:

$$\omega_1(y)=\int_0^y h_1(t)\cdot\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(y-t)dt+c_1\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y+c_2\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}y$$

Далее в силу условия (6) определяется , что $c_1=c_2=0,$ т.е

$$\omega_1(y)=\int_0^y\left[\frac{2}{\lambda}\mu_1^{/}(t)+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\psi_1(t)\right]\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(y-t)dt, \qquad \frac{q-1}{2}\le y\le 0, \tag{17}$$

Таким образом, в силу (4) решение задачи Коши – Гурса для уравнения (1) в области Ω_{11} определяется в явном виде.

С помощью решения задачи Гурса в области Ω_{21} для уравнения (5) с краевыми условиями (11) и

$$Z(x,y)\big|_{B_1E_1}=h_2(y)-\omega_2(y)\ ;$$

где функция является следом на $x+y=q$ решения задачи Коши – Гурса в области Ω_{11}, также учитывая (13), (14) и (6) находим неизвестную функцию $\omega_2(y)$, которая имеет вид:

$$\omega_2(y)=\int_0^y\left[\frac{2}{\lambda}\mu_2^{/}(t)+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\psi_2(t)\right]\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(y-t)dt, \qquad -\frac{1+q}{2}\le y\le\frac{q-1}{2} \tag{18}$$

Таким же методом определяя решение задачи Гурса в областе Ω_{23} для уравнение (5) и учитывая (13), (14) и (6), находим неизвестную функцию $\omega_3(y)$, которая имеет вид:

$$\omega_3(y)=\int_0^y\left[\frac{2}{\lambda}\mu_3^{/}(t)+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\psi_3(t)\right]\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}(y-t)dt, \qquad -1\le y\le -\frac{1+q}{2}. \tag{19}$$

Учитывая (4), (18) и (19), аналогичным образом определяются явный вид решения задачи Гурса для уравнения (1) в областях $\Omega_{2j}(j=2,3)$.

В силу симметричности областей Ω_{21} и Ω_{22}, Ω_{11} и Ω_{12} легко определяются решения задач Коши – Гурса и Гурса для уравнения (1) соответственно в областях Ω_{12} и Ω_{22}.

Единственность решения поставленной задачи следует из единственности решения задач Коши – Гурса и Гурса для уравнения (1). Теорема доказано.

Литература:

1. Салахитдинов.М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Ташкент. «Фан» 1974 г. 252 с.
2. Сабитов К.Б. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применения при обращении интегральных уравнений. Диф.Ур.1990.е-26.6
3. Прудников А.П. Брычков Ю.А. Маричев О.И. Интегралы и ряды специалные функции. М. Наука 1983 г.