УДК 517.9 + 513.83

А.Х.Жораев
A.Kh. Zhoraev

АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТИПОВ ОСОБЫХ ТОЧЕК РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ИМЕЮЩЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

При условии, что риманова поверхность задана сдвиговой функцией или ее интервальным представлением, построены алгоритмы, определяющие приближенно или доказательно некоторые типы особых точек на этой поверхности. Выявлены условия, при которых римановых поверхности, построенные сдвиговыми прямолинейными функциями, является кинематическим пространством.

Ключевые слова: алгоритм, кинематика, функция, интервал, определенные точки, дифференциальные уравнения.

ALGORITHMS FOR DETERMINING THE TYPES OF SINGULAR POINTS OF A RIEMANN SURFACE THAT HAS A KINEMATIC REPRESENTATION

Provided that the Riemann surface is given by a shift function or its interval representation, algorithms are constructed that determine some types of singular points on or approximate or provable on this surface. The conditions under which Riemann surfaces constructed by shear rectilinear functions are a kinematic space are revealed.

Key words: algorithm, kinematics, function, interval, definite points, differential equations.

При условии, что риманова поверхность задана сдвиговой функцией или ее интервальным представлением, построены алгоритмы, определяющие приближенно или доказательно некоторые типы особых точек на этой поверхности.

1. Основные определения

В [1], а также в [2] было внесено общее предложение о наглядном представлении математических объектов в научных и учебных целях. Это дает дополнительные возможности в преподавании математических дисциплин, а также возможность использовать интуицию человека для решения различных задач, которые раньше считались абстрактными. Далее в [1] было введено понятие кинематического пространства (в котором можно осуществлять естественное движение) и отмечено, что можно осуществлять движение на римановых поверхностях над комплексной плоскостью, определяемых дифференциальными уравнениями, но не были построены конкретные алгоритмы, не были выявлены условия, при которых римановы поверхности являются кинематическими пространствами.

В наших статьях [4], [5] такие достаточные условия установлены и построен такой алгоритм, осуществляющий (приближенно) движение по римановой поверхности, а также определяющий возможные особые точки. В нашей статье [6] построен соответствующий доказательный алгоритм.

В [1] было также предложено следующее.

О п р е д е л е н и е 1. Кинематическим пространством (*Ki*-пространством) будем называть пару: множество *G* точек и множество *K* маршрутов. Каждый маршрут $M\in K$, в свою очередь, состоит из положительного числа T_M (время маршрута) и функции $m_M : [0, T_M] \to G$ (траектория маршрута). Выполняются следующие свойства.

(K1) Для любых различных σ_1 и σ_2 существует такое $M\in K$, что $m_M(0) = \sigma_1$ и $m_M(T_M) = \sigma_2$, и множество значений T_M для таких M ограничено снизу положительным числом {сколь угодно быстрое передвижение невозможно}.

(K2) Если $M= \{T_M, m_M(t)\} \in K$, то $\{T_M, m_M(T_M- t)\}$ также принадлежит K {движение в обратном

направлении)}.

(K3) Если $M=\{T_M, m_M(t)\} \in K$ и $T^* \in (0, T_M)$, то пара: T^* и функция $m^*(t)=m_M(t)$ $(0 \le t \le T^*)$ также принадлежит K {можно остановиться в любой момент}.

(K4) Если $\{T_1, m_1(t)\} \in K$, $\{T_2, m_2(t)\} \in K$ и $m_1(T_1)=m_2(0)$, то пара, состоящая из числа $T^* = T_1 + T_2$ и функции

$$m^*(t)=\begin{cases} m_1(t) & (0 \le t < T_1), \\ m_2(t-T_1) & (T_1 \le t \le T_1+T_2= T^*) \end{cases}$$

также принадлежит K {транзитивность}.

Ki-пространство является линейно связным метрическим топологическим пространством с метрикой $d_K(\sigma_1, \sigma_2) = inf\{T_M \mid M \in K, m_M(0) = \sigma_1$ и $m_M(T_M) = \sigma_2\}$.

2. Кинематическое построение римановой поверхности

О п р е д е л е н и е 2. Сдвиговой прямолинейной функцией над комплексной плоскостью будем называть такую функцию трех комплексных переменных $f(z_1, z_2, w_1)$, принимающую или значение комплексного числа или «нет», что выполняются некоторые свойства. Для их формулировки введем понятие определенной сдвиговой ломаной: это – такая двойная последовательность комплексных чисел $\{z_1, z_2,\ldots, z_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, что $f(z_k, z_{k+1}, w_k) = w_{k+1}$, $k =1..n-1$. Число w_1 будем называть начальным значением, число w_n – конечным значением.

П р и м е ч а н и е. Для построения алгоритмов нельзя использовать не везде определенные функции, потому что они могут привести к аварийной остановке алгоритма. Поэтому здесь в определение введено значение «нет».

1) функция $f(z_1, z_2, w_1)$ непрерывна в следующем смысле: если она принимает значение комплексного числа (f_1) для некоторых z_1, z_2, w_1, то она принимает значения комплексных чисел для всех значений аргументов, достаточно близких к z_1, z_2, w_1, причем эти значения близки к f_1.

2) $f(z_1, z_1, w_1) \equiv w_1$.

3) $f(z_2, z_1, f(z_1, z_2, w_1)) \equiv w_2$.

4) Если точка z_2 лежит на отрезке между точками z_1, z_3 и $f(z_1, z_3, w_1)$ - комплексное число, то $f(z_1, z_2, w_1)$ – также комплексное число и $f(z_2, z_3, f(z_1, z_2, w_1)) = f(z_1, z_3, w_1)$.

5) Если определенную ломаную $\{z_1, z_2,\ldots, z_{n-1}, z_n\}$ можно непрерывно преобразовать в определенную ломаную $\{z_1, z_2',\ldots, z_{n-1}', z_n\}$ (возможно, с разделением одного отрезка на два или со слиянием двух смежных отрезков в один в соответствии с п. 3), то концевые значения должны быть одинаковыми.

6) Выполняется условие типа Липшица: существует такое $L > 0$, что

$|f(z_1, z_2, w_1) - w_1| \le L|z_1 - z_2|$.

Применительно к подходу [1] построение кинематического пространства - римановой поверхности (см. например [3]) осуществляется следующим образом.

Рассмотрим "начальное условие"

$$w(z_0)= w_0. \qquad (1)$$

Пара значений $\{z_0, w_0\}$ составляет элемент римановой поверхности.

Пусть z_1 – некоторая другая точка или эта же точка на комплексной плоскости, и M – некоторая ломаная, соединяющая эти точки, имеющая длину m. Если эта ломаная является определенной сдвиговой ломаной и ее концевое значение равно w_1, то пара $\{z_1, w_1\}$ также составит элемент римановой поверхности.

П р и м е ч а н и е. Ломаная M может самопересекаться.

Определим риманову поверхность S для сдвиговой прямолинейной функции $f(z_1, z_2, w_1)$ с (3), как множество пар точек $\{z_1, w_1\}$, для которых существует хотя бы одна такая ломаная.

Кинематическим расстоянием между $\{z_0, w_0\}$ и $\{z_1, w_1\} \in S$ назовем нижнюю грань длин определенных сдвиговых ломаных m, дающих в точке z_1 значение w_1. Кинематическим расстоянием между $\{z_1, w_1\} \in S$ и $\{z_2, w_2\} \in S$ назовем нижнюю грань длин m определенных сдвиговых ломаных M, соединяющих точки z_1 и z_2 и соответственно связывающих между собой значения w_1 и w_2.

Т е о р е м а 1. Риманова поверхность S таких пар точек $\{z_1, w_1\}$ является кинематическим пространством.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнение аксиом Определения 1.

Выполнение (К1) доказывается следующим образом. Для двух не равных между собой элементов пространства $\{z_1, w_1\}$ и $\{z_2, w_2\}$ получаем следующее. Если $z_1 \neq z_2$, то, очевидно, $d_K(\{z_1, w_1\}, \{z_2, w_2\}) \geq |z_1 - z_2| > 0$.

Если $z_1 = z_2$, то в силу условия 6) Определения 2 получаем: длина любой определенной ломаной, соединяющей эти точки и имеющей начальное значение w_1 и концевое - w_2, будет не менее $|w_1 - w_2| / L > 0$.

Выполнение (К1) доказано. Выполнение (К2), (К3), (К4) очевидно. Теорема доказана.

Сдвиговые прямолинейные функции могут быть построены:

- решением дифференциального уравнения с начальным условием вида (3) вдоль отрезка, соединяющего точки z_1 и z_2;
- решением алгебраического уравнения в окрестности решения вида (3) вдоль отрезка, соединяющего z_1 и z_2 [4] .

Для строгого алгоритмического исследования римановых поверхностей, описываемых сдвиговыми функциями, нам понадобятся понятия интервального анализа, см. например [7].

Комплексным интервалом будем называть прямоугольник Z на комплексной плоскости. Если $z \in Z$, то Z называется интервальным представлением числа z.

О п р е д е л е н и е 3. Интервальным расширением сдвиговой прямолинейной функции $f(z_1, z_2, w_1)$ будем называть интервальную интервально-значную функцию $F(Z_1, Z_2, W_1)$ такую, что

1) из $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$, $w_1 \in W_1$ следует $f(z_1, z_2, w_1) \in F(Z_1, Z_2, W_1)$;

2) если комплексные интервалы Z_1, Z_2, W_1 стягиваются к z_1, z_2, w_1, соответственно, то $F(Z_1, Z_2, W_1)$ стягивается к $f(z_1, z_2, w_1)$.

3. Описание алгоритма

Требуется по заданным: условию (1), алгоритму приближенного вычисления сдвиговой прямолинейной функции или алгоритму гарантированного вычисления ее интервального расширения определить возможные типы особых точек и точек ветвления римановой поверхности.

Выбираем достаточно малый шаг $h > 0$.

Для следующего алгоритма также выбираем положительные числа: малое число ε - граница для «совпадения» двух чисел; число E – граница для «различия» двух чисел.

Вспомогательный А л г о р и т м 1. По заданным: числам z', w', алгоритму приближенного вычисления сдвиговой прямолинейной функции, числу B - «направлению построения квадрата со стороной g» - одному из чисел 1, 2, 3, 4 (согласно обозначениям квадрантов), числам $g > 0$, ε, E:

А) Вычисляем (пока это возможно) значения

$w_1 = f(z', z'+vg, w')$, где $v = 1$ для $B=1$, $v = i$ для $B=2$, $v = -1$ для $B=3$, $v = -i$ для $B = 4$;

$w_2 = f(z'+vg, z'+vg+ivg, w_1)$; $w_3 = f(z'+vg+ivg, z'+ivg, w_2)$; $w_4 = f(z'+ivg, z', w_3)$.

Б) Если в процессе вычислений возникло значение «нет», то ВЫХОД с этим значением, иначе

В) Если $|w' - w_4| < \varepsilon$, то ВЫХОД со значением «равно»; если $|w' - w_4| > E$, то ВЫХОД со значением «не равно»; иначе ВЫХОД со значением «неопределенно».

Следующий алгоритм изложим неформально.

А л г о р и т м 2. По заданным: начальным значениям (1), алгоритму приближенного вычисления сдвиговой прямолинейной функции, числам h, ε, E, ограничениям по размеру области, времени, памяти:

Обозначим $z_{pq} = z_0 + ph + iqh$; w_{pq} – вектор значений числа w в данной точке, размерности n_{pq} (количество значений w для римановой поверхности в данной точке), p, q – целые числа.

А) Полагаем множество $M = \{z_{00}\}$ (состоящее из одной точки), $w_{00} = w_0$, $n_{00} = 1$; все остальные $n_{pq} = 0$.

Б) Применяем Алгоритм 1 с исходными данными, находящимися «на всех краях» множества *M,* с $g= h$, и с соответствующими направлениями «построения квадратов» наружу от множества *M.*

В) Если вычисление по Алгоритму 1 дало результат «равно», то

В1) там, где $n_{pq} =0$, присваиваем соответствующие значения w_{pq} и полагаем соответствующие $n_{pq} =1;$ включаем соответствующие z_{pq} в множество *M.*

В2) там, где $n_{pq} >0$, оставляем все без изменения.

Г) Если где-либо получен результат «неопределенно», то присваиваем значения «неопределенно» соответствующим w_{pq}, еще не имеющим значений.

Д) Если где-либо получен результат «не равно», то: полагаем соответствующие $n_{pq} =n_{pq}+1$ и присваиваем дополнительные значения соответствующим последним компонентам векторов $w_{pq};$ если последняя компонента отличается меньше, чем на $\varepsilon,$ от одной из предыдущих компонент, то выводим координаты данного квадрата и сообщение: «в данном квадрате имеется точка ветвления порядка, равного разности номеров близких компонент».

Е) В случаях Г) применяем алгоритм 1 с той же начальной точкой, но с увеличенным размером квадрата: $g=2h,\ g=3h,\ldots$, пока не получим значения «равно» или «не равно». Тогда поступаем, как в пп. В) и Д).

Ж) Если мы дошли до ограничений по размеру области, времени, памяти (количеству элементов в множестве *M*), то ВЫХОД, иначе переходим к п. Б).

Если для сдвиговой прямолинейной функции $f(z_1,\ z_2,\ w_1)$ удалось построить интервальное расширение $F(Z_1,\ Z_2,\ W_1)$ и его машинную реализацию, то некоторые соотношения в Алгоритмах 1 и 2 можно доказать строго и соответственно сделать строгий вывод.

Для этого рассмотрим основной п. В) Алгоритма 1.

Если интервалы для w' и w_4 имеют пустое пересечение, то ВЫХОД со значением «не равно» (здесь доказательство – уже строгое).

Литература

1. Борубаев А.А., Панков П.С. Компьютерные представления кинематических топологических пространств. – Бишкек: КГНУ, 1999. – 131 с.

2. Панков П.С., Табылды кызы Ж. Образно-визуальная компонента математики в аспекте интеграции науки и образования // Проблемы математики и информатики в XXI веке: Труды международной научной конференции. – Бишкек: КГНУ, 2000 / Вестник КГНУ: серия 3. Естественно-технические науки. – Выпуск 4. Математические науки. Информатика и информационные технологии. – С. 297-299.

3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного. – Москва: Наука, 1976. – Глава III, с. 154-203.

4. Панков П.С., Жораев А.Х. Наглядное кинематическое представление римановой поверхности, определяемой алгебраическим уравнением // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына. Серия 6. Наука и инновационные образовательные технологии в вузе. Труды ИИМОП. – Вып. 5. - Бишкек: КНУ, 2006. - С. 422-426.

5. Жораев А.Х., Ельгин А.А. Наглядное кинематическое представление римановой поверхности, определяемой "сдвиговой" функцией // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 34. – Бишкек: Илим, 2006. – С. 179-183.

6. Жораев А.Х. Оценки "областей определенности" при кинематическом построении римановых поверхностей // Вестник КНУ им. Ж.Баласагына: Естественно-технические науки. Серия 3. Вып. 4. Математика. Информатика. Кибернетика. Бишкек, 2007. – С. 9-14.

7. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. – Новосибирск: Наука, 1986. – 222 с.