УДК 517.956.6

А.Сопуев, Н.К.Аркабаев
Проректор по УР ОшТУ, ст.преп.ОшГУ
A.Sopuyev, N.K.Arkabayev
Vice-rector TW OshTU, senior teacher OshSU

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Доказана теорема единственности решения задачи сопряжения для уравнений в частных производных третьего порядка с характеристической линией, принадлежащих к разным типам.

Ключевые слова: уравнения, сопряжения, уравнения третьего порядка, решения задачи.

UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE CONJUGATION PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER

A uniqueness theorem for the solution of the conjugation problem for third-order partial differential equations with a characteristic line belonging to different types is proved.

Keywords: equations, conjugations, third-order equations, solution of the problem.

Рассмотрим уравнения

$$L_1(u) \equiv u_{xxy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0,\ (x,y) \in D_1 \qquad (1)$$

$$L_2(u) \equiv u_{xxx} - u_{yy} = 0,\ (x,y) \in D_2, \qquad (2)$$

где

$D_1 = \{(x,y) : 0 < x < \ell, 0 < y < h_1\}$, $D_2 = \{(x,y) : 0 < x < \ell, -h_2 < y < 0\}$, $\ell,\ h_1,\ h_2 > 0$. Пусть $D = D_1 \cup D_2$.

Уравнения (1) и (2) по классификации работы [1] принадлежат разным типам. Прямая $y = 0$ является характеристикой одновременно для уравнений (1) и (2).

Краевые задачи как для уравнения (1), так и для уравнения (2), в отдельности, рассматривались в работах [2], [3], [4].

В работе исследуется задача сопряжения для уравнений (1) и (2), когда на линии $y = 0$ выполняются следующие условия

, . (3)

К таким задачам приводятся математические модели ряд задач механики сплошных сред, физики и техники, параметры которых резко отличаются в окрестности линии сопряжения [5, 6, 7].

Задача 1. Найти в области решение уравнения (1) и (2) удовлетворяющее краевым условиям

, , , (4)

(5)

и условиям сопряжения (3), где , заданные функции, причем

$\varphi_i(y) \in C^1[0,h_1]$ $(i=1,\ 2)$, $\chi_j(y) \in C^1[-h_2,0]$ $(j=\overline{1,3})$,

$\psi(0) = \chi_1(-h_2), \psi(\ell) = \chi_2(-h_2),$ (6)

$\varphi_i^{(k)}(0) = \chi_i^{(k)}(0)$ $(i=1,2;\ k=0,1)$ (7)

Аналогичная задача исследована в работе [4], когда вместо уравнения (1) рассматривалось уравнение

$u_{xxx} + u_y + a(x,y)u_x + c(x,y)u = f(x,y)$.

Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем следующее условие

$a(x,y), a_x(x,y), b(x,y), b_y(x,y), c(x,y) \in C(\overline{D_1})$. (8)

Воспользуясь условием сопряжения (3), введем обозначения

$u(x,\pm 0) = \tau(x)$, $u_y(x,+0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell$, (9)

где $\tau(x)$, $\nu(x)$ пока неизвестные функции.

Тогда в силу (7) имеем следующие условия согласования

$\tau(0) = \varphi_1(0) = \chi_1(0),\ \tau'(\ell) = \chi_3(0),\ \tau(\ell) = \varphi_2(0) = \chi_2(0),$

$\chi_1(-h_2) = \psi(0),\ \chi_2(-h_2) = \psi(\ell),$ (10)

$\nu(0) = \varphi_1'(0) = \chi_1'(0)$, $\nu(\ell) = \varphi_2'(0) = \chi_2'(0)$. (11)

Переходя к пределу при $y \to +0$ в уравнении (1) имеем

$\nu''(x) + a(x,0)\tau'(x) + b(x,0)\nu(x) + c(x,0)\tau(x) = 0,\ 0 < x < \ell$ (12)

Докажем единственность решения задачи 1. Имеет место

Теорема. Если выполняются условия (6), (7), (8), (10), (11) и

$\forall x \in [0,\ell] : c(x,0) \ne 0$, (13)

$\forall x \in [0,\ell] : a(x,0) \ne 0,\ \dfrac{1-b(x,0)}{c(x,0)} \le 0$, (14)

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in [0,\ell] : b(x,h_1) \le 0 \\ \forall (x,y) \in D_1 : a(x,y) + b_y(x,y) - 2c(x,y) \ge 0 \end{array}\right\}, \quad (15)$$

то задача 1 имеет единственное решение.

Доказательство. Рассмотрим задачу с однородными условиями

$u(0,y) = 0$, $u(\ell,y) = 0$, $0 \le y \le h_1$ (16)

$u(0,y) = 0$, $u(\ell,y) = 0$, $u_x(\ell,y) = 0$, $-h_2 \le y \le 0$, (17)

$u(x,-h_2) = 0$, $0 \le x \le \ell$

при этом условия согласования (10), (11) примут вид

, , , (18)

, . (19)

Интегрируя тождество

по области и используя формулу Грина, имеем

. (20)

Вычисляя значения криволинейного интеграла по границе области D_2 из (17) с учетом (14) получим

$$\int_0^{\ell} \tau(x)\nu(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-h_2}^{0} u_x^2(0,y)dy + \iint_{D_2} u_y^2(x,y)dxdy \geq 0 \quad . \qquad (21)$$

С другой стороны в силу условия (13) из (14) и (15), (16) будем иметь

$$\int_0^{l} \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^{\ell} \frac{1-b(x,0)}{c(x,0)}\nu^2(x)dx \leq 0 \quad . \qquad (22)$$

Сравнивая (21) и (22), получаем равенство

$$\frac{1}{2}\int_{-h_2}^{0} u_x^2(0,y)dy + \iint_{D_2} u_y^2(x,y)dxdy = 0 \quad ,$$

из которого имеем

$$\forall y \in [-h_2,0] : \; u_x(0,y) = 0, \;\; \forall (x,y) \in \overline{D_2} : \; u(x,y) \equiv 0 \; .$$

Тогда в области D_1 приходим к следующей однородной задаче:

$$L_1(u) = 0 \; , \qquad (23)$$

$$u(0,y) = 0 \; , \; u(\ell,y) = 0 \; , \; 0 \leq y \leq h_1 \qquad (24)$$

$$u(x,0) = 0 \; , \; 0 \leq x \leq \ell$$

Интегрируя тождество

$$uL_1(u) \equiv \left(uu_{xy} + \frac{1}{2}au^2 \right)_x - \frac{1}{2}\left(u_x^2 - bu^2\right)_y + \frac{1}{2}\left(2c - a_x - b_y\right)u^2 = 0$$

по области D_1 и учитывая (24) имеем

$$\int_0^{\ell} \left[u_x^2(x,h_1) - b(x,h_1)u^2(x,h_1)\right]dx + \iint_{D_2} \left(a_x + b_y - 2c\right)u^2 dxdy = 0 \qquad (25)$$

При выполнении условия (15) из (25) получим

$$\forall x \in [0,\ell] : \; u(x,h_1) = 0 \; , \; u_x(x,h_1) = 0 \; ,$$

$$\forall (x,y) \in D_2 : \; u(x,y) = 0 \; .$$

Отсюда, в силу непрерывности $u(x,y)$ в $\overline{D_2}$ следует, что

$$\forall u(x,y) \in \overline{D_2} : \; u(x,y) \equiv 0 \; .$$

Это означает, что однородная задача (23), (24) имеет только тривиальное решение. Следовательно, решение задачи 1 единственно.

Теорема доказана.

Литература:

1. Джураев Т.Д., Попёлок Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
2. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Нальчик, 1985. - 225 с.
3. Абдиназаров С. Краевые задачи для уравнений с кратными характеристиками: Автореф. дис. ... докт. физ. - мат. наук: 01.01.02. - Ташкент, 1992. – 27 с.
4. Хошимов А.Р. Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в криволинейных областях. Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. -

Ташкент, 1995. - 94 с.
5. Кузьмин А.Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1990. – 208 с.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 624 с.