УДК.517.956.6

Т.Д.Асылбеков, М.К.Сагындыков, К.Г.Кожобеков, М.К.Чамашев
К.ф.-м.н., ОшГУ, ст.преп.ОшГУ, ст.преп.ОшГУ
T.D. Asylbekov, M.K. Sagyndykov, K.G. Kozhobekov, M. K. Chamashev
c.ph.m.s., OshTU, senior teacher OshSU, senior teacher OshSU

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМЕШАННО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $y = x$

В этой статье приведено примеры решения смешанно-гиперболических уравнений четвертого порядка с нехарактеристической линией сопряжения $y = x$

Ключевые слова: краевые задачи, смешанно-гиперболические уравнение, уравнения четвертого порядка, функция.

MARGINAL PROBLEMS FOR MIXED-HYPERBOLIC EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER WITH NOT INDICATIVE INTERFACING LINE Y=X

Keywords: boundary value problems, mixed-hyperbolic equation, fourth-order equations, function.

In this paper we give examples of solutions of fourth-order mixed-hyperbolic equations with a non-characteristic conjugation line.

Пусть D означает прямоугольник с вершинами $A(0,0)$, $B(h,0)$, $B_1(h,h)$, $A_1(0,h)$, а $D_1 = D \cap (y > x)$, $D_2 = D \cap (y < x)$.

В области D_1 рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка с трехкратными характеристиками

$$L(u) \equiv u_{xxxy}(x,y) + \alpha_1(x,y)u_{xxx}(x,y) + \alpha_2(x,y)u_{xxy}(x,y) + \beta_1(x,y)u_{xx}(x,y) +$$
$$+ \beta_2(x,y)u_{xy}(x,y) + \gamma_1(x,y)u_x(x,y) + \gamma_2(x,y)u_y(x,y) + \delta(x,y)u(x,y) = f_1(x,y), \quad (1)$$

где

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta, f_1 \in C(\overline{D_1}), \ i = 1,2, \quad (2)$$

$$\alpha_{1xxx}, \alpha_{2xxy}, \beta_{1xx}, \beta_{2xy}, \gamma_{1x}, \gamma_{2y} \in C(\overline{D_1}), \quad (3)$$

а в области D_2 рассмотрим гиперболическое уравнение четвертого порядка с двукрат-ными характеристиками

(4)

где

, (2)

. (3)

Введем в рассмотрение класс функций [1]

$$M_1 = \{u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D), u_{xx}, u_{xy}, u_{xxx}, u_{xxy} C(\overline{D}_1), u_{xxxy} \in C(D_1), u_{xxy}, u_{xyy} \in C(\overline{D}_2), u_{xxyy} \in C(D_2)\}.$$

Задача 1. Требуется найти функцию из класса M_1 удовлетворяющую уравнению (1) в области D_1, граничным условиям

$$u(0,y) = \psi_1(y),\ u_x(0,y) = \psi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{5}$$

и уравнению (2) в области D_2, граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ u_x(x,0) = \varphi_2(x),\ 0 \le x \le h, \tag{6}$$

и условиям сопряжения на линии $y = x$

$$u\big|_{y=x+0} = u\big|_{y=x-0} = \tau(x), \tag{7}$$

$$u_x\big|_{y=x+0} = u_x\big|_{y=x-0} = \nu(x), \tag{8}$$

$$u_{xy}\big|_{y=x+0} = u_{xy}\big|_{y=x-0} = \mu(x), \tag{9}$$

$$u_{xxy}\big|_{y=x+0} = u_{xxy}\big|_{y=x-0} = \chi(x), \tag{10}$$

где $\psi_1(y), \psi_2(y), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – *заданные гладкие функции, причем*

$$\varphi_1(0) = \tau(0),\ \varphi_2(0) = \tau'(0). \tag{11}$$

Отметим, что прямая $y = const$ является трехкратной, прямая $x = const$ однократной характеристикой уравнения (1), а прямые $x = const$ и $y = const$ являются двукратными характеристиками уравнения (2) [1]. Таким образом, уравнения (1) в области D_1 имеет одну трехкратную и одну однократную характеристику а уравнение (2) в области D_2 имеет два двукратных характеристик, поэтому уравнения (1) и (2) в области D, по аналогии терминологий работы [2], назовем смешанно-гиперболичес-кими.

Известно, что решение задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющее условиям (7), (8), (9), (10) в области D_1 представимо в виде [3,4]:

$$u(x,y) = [\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;x,x) - E_4(x,y,x)]\tau(x) + E_4(x,y,y)\tau(y) + D_4(x,y,y)\nu(y) -$$

$$- D_4(x,y,x)\nu(x) + \int_x^y [[A_4(x,y,\xi) - E_{4\xi}(x,y,\xi)]\tau(\xi) + [B_4(x,y,\xi) - D_{4\xi}(x,y,\xi)]\nu(\xi) +$$

$$+ C_4(x,y,\xi)\mu(\xi) + \vartheta_1(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)]d\xi - \int_x^y d\xi \int_\xi^y \vartheta_1(x,y;\xi,\eta) f_1(\xi,\eta) d\eta, \tag{12}$$

где

$\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ функция Римана удовлетворяющую условиям:

Функция $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\in M_1$ по совокупности переменных $(x,y;\xi,\eta)$ на $\overline{D}_1\times\overline{D}_1$;

при каждой $(x,y)\in\overline{D}_1$ функция $\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$L^*_{(\xi,\eta)}(\vartheta_1(x,y;\xi,\eta))=0,\ \ (\xi,\eta)\in D_1 \tag{13}$$

и условиям на характеристиках $\xi=x$ и $\eta=y$.

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\quad \vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\ 0\le\eta\le y,\\
&\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)\Big|_{\xi=x}=exp(\int_y^\eta\alpha_1(x,\eta_1)d\eta_1),\qquad 0\le\eta\le y,\\
&\vartheta_1(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega(x,y,\xi),\qquad\qquad 0\le\xi\le x,
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где $\omega(x,y,\xi)$ - решение следующей задачи Коши

$$\vartheta_{1\xi\xi\xi}(x,y;\xi,y)-\alpha_2(\xi,y)\vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y)+[\beta_2(\xi,y)-2\alpha_{2\xi}(\xi,y)]\vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,y)\times$$
$$-[\alpha_{2\xi\xi}(\xi,y)-\beta_{2\xi}(\xi,y)+\gamma_2(\xi,y)]\vartheta_1(x,y;\xi,y)=0,\ 0<\xi<x, \tag{15}$$

$$\vartheta_1(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{1\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ \vartheta_{1\xi\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \tag{16}$$

Так как решение задачи Коши для уравнения (2), удовлетворяющее условиям (7), (8), (9), (10) в области D_2 представимо в виде [5]:

$$u(x,y)=\vartheta_{2\eta\xi}(x,y;y,y)\tau(y)-\int_x^y[\vartheta_2(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)+A_3(x,y;\xi)\mu(\xi)-$$
$$-B_3(x,y,\xi)\nu(\xi)+C_3(x,y;\xi)\tau(\xi)]d\xi-\int_x^y d\xi\int_\xi^y\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta, \tag{17}$$

где

$$A_3(x,y;\xi)=\vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,\xi)-[a_1(\xi,\xi)-a_2(\xi,\xi)]\vartheta_2(x,y;\xi,\xi),$$
$$B_3(x,y;\xi)=-\vartheta_{2\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)+a_1(\xi,\xi)\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,\xi)+a_2(\xi,\xi)\vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,\xi)+$$
$$+[b_1(\xi,\xi)-b_2(\xi,\xi)+b_3(\xi,\xi)+a_{1\xi}(\xi,\xi)+a_{2\eta}(\xi,\xi)]\vartheta_2(x,y;\xi,\xi),$$
$$C_3(x,y;\xi)=\vartheta_{2\eta\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)-a_1(\xi,\xi)\vartheta_{2\eta\xi}(x,y;\xi,\xi)-a_2(\xi,\xi)\vartheta_{2\eta\eta}(x,y;\xi,\xi)+$$
$$+[b_1(\xi,\xi)-b_3(\xi,\xi)-a_{1\eta}(\xi,\xi)]\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,\xi)+[b_2(\xi,\xi)-a_{1\xi}(\xi,\xi)-2a_{2\eta}(\xi,\xi)]\times$$
$$\times\vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,\xi)+[b_3(\xi,\xi)-c_1(\xi,\xi)-c_2(\xi,\xi)+b_{1\xi}(\xi,\xi)+b_{2\eta}(\xi,\xi)-b_{3\xi}(\xi,\xi)-b_{3\eta}(\xi,\xi)-$$
$$-a_{1\eta\xi}(\xi,\xi)-a_{2\eta\eta}(\xi,\xi)]\vartheta_2(x,y;\xi,\xi),$$

а

- функция Римана, удовлетворяющая условиям:

по совокупности переменных на ;

- решение сопряженной задачи

(18)

$$\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\vartheta_{2\xi}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=\omega_1(\eta,x,y),\quad 0\le\eta\le y,$$
$$\vartheta_2(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\omega_2(\xi,x,y),\quad 0\le\xi\le x, \tag{19}$$

где $\omega_1(\eta,x,y)$ и $\omega_2(\xi,x,y)$ являются решениями следующих задач Коши соответственно

$$\begin{cases}\vartheta_{2\eta\xi\xi}(x,y;\xi,y)+\dfrac{\partial}{\partial\xi}\left[a_2(\xi,y)\vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,y)\right]+b_3(\xi,y)\vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,y)=0,\\ \vartheta_{2\eta}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\vartheta_{2\eta\xi}(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1,\qquad 0\le\xi\le x\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}\vartheta_{2\xi\eta\eta}(x,y;x,\eta)+\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[a_1(x,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;x,\eta)\right]+b_1(x,\eta)\vartheta_{2\xi}(x,y;x,\eta)=0,\\ \vartheta_{2\xi}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=0,\ \vartheta_{2\xi\eta}(x,y;x,\eta)\big|_{\eta=y}=1.\end{cases} \tag{21}$$

Пологая $x=0$ и учитывая (5), (11), обозначив все известные функции через $g_1(y)$ из (12) имеем:

$$E_4(0,y,y)\tau(y)+D_4(0,y,y)\nu(y)+\int_0^y\left[[A_4(0,y,\xi)-E_{4\xi}(0,y,\xi)]\tau(\xi)+\right.$$
$$\left.+[B_4(0,y,\xi)-D_{4\xi}(0,y,\xi)]\nu(\xi)+C_4(0,y,\xi)\mu(\xi)+\vartheta_1(0,y;\xi,\xi)\chi(\xi)\right]d\xi=g_1(y), \tag{22}$$

где

$$g_1(y)=\psi_1(y)-[\vartheta_{1\xi\xi}(0,y;0,0)-E_4(0,y,0)]\tau(0)+D_4(0,y,0)\nu(0)+\int_0^y d\xi\int_\xi^y\vartheta_1(0,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta.$$

Положив

$$\int_0^y\mu(\xi)d\xi=M(\xi),\qquad\int_0^y\chi(\xi)d\xi=X(\xi)$$

используя интегрирование по частям

и обозначив все известные функции через $g_3(y)$ из (22) получим интегральное уравнение в виде[6]:

$$E_4(0,y,y)\tau(y)+D_4(0,y,y)\nu(y)+C_4(0,y,y)M(y)+\vartheta_1(0,y;y,y)X(y)+$$
$$+\int_0^y\left[[A_4(0,y,\xi)-E_{4\xi}(0,y,\xi)]\tau(\xi)+[B_4(0,y,\xi)-D_{4\xi}(0,y,\xi)]\nu(\xi)+C_{4\xi}(0,y,\xi)M(\xi)+\right.$$
$$\left.+\vartheta_{1\xi}(0,y;\xi,\xi)X(\xi)\right]d\xi=g_3(y), \tag{23}$$

где

$$g_3(y)=g_1(y)+C_4(0,y,0)M(0)+\vartheta_1(0,y;0,0)X(0).$$

Дифференцируя (12) по , пологая , учитывая (5), (11) и аналогично, используя интегрирование по частям, обозначив все известные функции через из (12) имеем:

(24)

где

$$g_2(y)=\psi_2(y)-[\vartheta_{1\xi\xi x}(0,y;0,0)-E_{4x}(0,y,0)]\tau(0)-[\vartheta_{1\xi\xi}(0,y;0,0)-E_4(0,y,0)]\tau'(0)+$$
$$+D_{4x}(0,y,0)\nu(0)+D_4(0,y,0)\nu'(0)-[A_4(0,y,0)-E_{4\xi}(0,y,0)]\tau(0)-$$
$$-[B_4(0,y,0)+C_{4x}(0,y,0)M(0)+\vartheta_{1x}(0,y;0,0)X(0)-D_{4\xi}(0,y,0)]\nu(0)-C_4(0,y,0)\mu(0)-$$
$$-\vartheta_1(0,y;0,0)\chi(0)]+\left(\int_x^y d\xi\int_\xi^y \vartheta_1(x,y;\xi,\eta)f_1(\xi,\eta)d\eta,\right)'_x\Bigg|_{x=0}.$$

Пологая $y=0$ и учитывая (6), (11), положив $\int_0^x \mu(\xi)d\xi=M(\xi),\ \int_0^x \chi(\xi)d\xi=X(\xi)$ используя интегрирование по частям и обозначив все известные функции через $g_4(x)$ из (17) получим интегральное уравнение в виде:

$$\vartheta_2(x,0;x,x)X(x)+A_3(x,0;x)M(x)+\int_0^x[\vartheta_{2\xi}(x,0;\xi,\xi)X(\xi)+A_{3\xi}(x,0;\xi)M(\xi)-$$
$$-B_3(x,0,\xi)\nu(\xi)+C_3(x,0;\xi)\tau(\xi)]d\xi=g_4(x), \qquad (25)$$

где

$$g_4(x)=\varphi_1(x)-\vartheta_{2\eta\xi}(x,0;0,0)\tau(0)+\vartheta_2(x,0;0,0)X(0)+A_3(x,0;0)M(0)+$$
$$+\int_0^x d\xi\int_0^\xi \vartheta_2(x,0;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta,$$

Дифференцируя (17) по y, пологая $y=0$, учитывая (5), (11) и аналогично, используя интегрирование по частям, обозначив все известные функции через $g_5(x)$ из (17) имеем:

$$\vartheta_{2y}(x,x;x,x)X(x)+A_{3y}(x,x;x)M(x)+\int_0^x[\vartheta_{2y\xi}(x,x;\xi,\xi)X(\xi)+$$
$$+A_{3y\xi}(x,x;\xi)M(\xi)-B_{3y}(x,x,\xi)\nu(\xi)+C_{3y}(x,x;\xi)\tau(\xi)]d\xi=g_5(x), \qquad (26)$$

где

$$g_5(x)=\varphi_2(x)-\vartheta_{2\eta\xi y}(x,0;0,0)\tau(0)-\vartheta_{2\eta\xi}(x,0;0,0)\tau'(0)-\vartheta_2(x,0;0,0)\chi(0)-$$
$$+\vartheta_{2y\xi}(x,x;0,0)X(0)+A_{3y\xi}(x,x;0)M(0)-A_3(x,0;0)\mu(0)+B_3(x,0,0)\nu(0)-$$
$$-C_3(x,0;\xi)\tau(0)+\left(\int_x^y d\xi\int_\xi^y \vartheta_2(x,y;\xi,\eta)f_2(\xi,\eta)d\eta\right)'_y\Bigg|_{y=0},$$

Из (23), (24), (25), (26) имеем системы интегральных уравнений в виде**:**

$$
\begin{cases}
E_4(0,y,y)\tau(y)+D_4(0,y,y)\nu(y)+C_4(0,y,y)M(y)+\vartheta_1(0,y;y,y)X(y)+\\
+\int\limits_0^y\Big[[A_4(0,y,\xi)-E_{4\xi}(0,y,\xi)]\tau(\xi)+[B_4(0,y,\xi)-D_{4\xi}(0,y,\xi)]\nu(\xi)+C_{4\xi}(0,y,\xi)M(\xi)+\\
+\vartheta_{1\xi}(0,y;\xi,\xi)X(\xi)\Big]d\xi=g_3(y),\\
E_{4x}(0,y,y)\tau(y)+D_{4x}(0,y,y)\nu(y)+C_{4x}(0,y,y)M(y)+\vartheta_{1x}(0,y;y,y)X(y)+\\
+\int\limits_0^y\Big[[A_{4x}(0,y,\xi)-E_{4\xi x}(0,y,\xi)]\tau(\xi)+[B_{4x}(0,y,\xi)-D_{4\xi x}(0,y,\xi)]\nu(\xi)+\\
+C_{4x\xi}(0,y,\xi)M(\xi)+\vartheta_{1x\xi}(0,y;\xi,\xi)X(\xi)\Big]d\xi=g_2(y),\\
\vartheta_2(x,0;x,x)X(x)+A_3(x,0;x)M(x)+\int\limits_0^x\Big[\vartheta_{2\xi}(x,0;\xi,\xi)X(\xi)+A_{3\xi}(x,0;\xi)M(\xi)-\\
-B_3(x,0,\xi)\nu(\xi)+C_3(x,0;\xi)\tau(\xi)\Big]d\xi=g_4(x),\\
\vartheta_{2y}(x,x;x,x)X(x)+A_{3y}(x,x;x)M(x)+\int\limits_0^x\Big[\vartheta_{2y\xi}(x,x;\xi,\xi)X(\xi)+\\
+A_{3y\xi}(x,x;\xi)M(\xi)-B_{3y}(x,x,\xi)\nu(\xi)+C_{3y}(x,x;\xi)\tau(\xi)\Big]d\xi=g_5(x),
\end{cases}
\tag{27}
$$

Вводим следующие обозначения

$$
\Lambda(y)=\begin{pmatrix}\tau(y)\\ \nu(y)\\ M(y)\\ X(y)\end{pmatrix},\quad A(y)=\begin{pmatrix}E_4(0,y,y) & D_4(0,y,y) & C_4(0,y,y) & \vartheta_1(y,0,y,y)\\ E_{4x}(0,y,y) & D_{4x}(0,y,y) & C_{4x}(0,y,y) & \vartheta_{1x}(y,0,y,y)\end{pmatrix},
$$

$$
K_1(y,\xi)=\begin{pmatrix}A_4(0,y,\xi)-E_{4\xi}(0,y,\xi) & B_4(0,y,\xi)-D_{4\xi}(0,y,\xi) & C_{4\xi}(0,y,\xi) & \vartheta_1(y,0,y,\xi)\\ A_{4x}(0,y,\xi)-E_{4\xi}(0,y,\xi) & B_4(0,y,\xi)-D_{4\xi}(0,y,\xi) & C_{4\xi}(0,y,\xi) & \vartheta_1(y,0,y,\xi)\end{pmatrix}
$$

$$
\Lambda_1(x)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ M(x)\\ X(x)\end{pmatrix},\quad A_1(x)=\begin{pmatrix}0 & 0 & A_3(0,x,x) & \vartheta_2(x,0,x,x)\\ 0 & 0 & A_{3y}(0,x,x) & \vartheta_{2y}(x,0,x,x)\end{pmatrix},
$$

$$
K_2(x,\xi)=\begin{pmatrix}C_3(x,0,\xi) & -B_{3\xi}(x,0,\xi) & A_{3\xi}(x,0,\xi) & \vartheta_{2\xi}(x,0,\xi)\\ C_{3y}(x,0,\xi) & -B_{3y\xi}(x,0,\xi) & A_{3y\xi}(x,0,\xi) & \vartheta_{2y\xi}(x,0,\xi)\end{pmatrix}
$$

тогда из (27) получим

(28)

(14) при , и является интегральным уравнениям Вольтерра второго рода имеет единственное решение. Найдя из (28) все неизвестные функции и подставляя в (12), (17) получим решение задачи 1.

Теорема 1. ***Если*** $A(y) \neq 0,\ A_1(x) \neq 0$, $K_1(y,y) \neq 0,\ K_2(x,x) \neq 0$, $G_1(y) \neq 0,\ G_2(x) \neq 0$ ***и выполняются (2), (3) то решение задачи 1 существует и единственно в классе*** M_1.

Литература:

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: Дис. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02.–Бишкек, 1996.-249 с.
2. Pagani C.D., Talenti G. On a forward-backward parabolic equation// Ann. Di Mat. Pura ed appl. -1971. –Ser. quarta. –Tomo XC. – P. 1-57.
3. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02.–Бишкек, 2003.-121 с.
4. Сопуев А., Асылбеков Т.Д. Функции Римана и представление общего решения гиперболических уравнений четвертого порядка//Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям.-Бишкек: Илим, 1998.-Вып.27.-С. 276 - 280.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А., Асылбеков Т.Д. Свойства функции Римана для гиперболических уравнений четвертого порядка//Научные труды ОшГУ. Серия 2. Физико- математические науки.–Ош. 1999.-С. 89-98.
6. Лернер М.Е. О качественных свойствах функции Римана//Дифференц. уравнения.–1991.–Т.27. -№12.–С. 2106-2120
7. Бицадзе А.В. Уравнение математической физики.–М.: Наука, 1982.–336 с.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения–М.: ИЛ, 1960.–229 с.